

BAREM DE CORECTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a XI-a

1. 1p din oficiu

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $u = a + d$

Din ipoteză rezultă $\det(X^n) = 0$ **1p**

Din relația Cayley-Hamilton se obține $X^2 = u \cdot X$, de unde prin inducție,

$$X^n = u^{n-1} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{2p}$$

Rezultă $u^{n-1} \cdot a = 3$, $u^{n-1} \cdot b = 1$, $u^{n-1} \cdot c = 6$, $u^{n-1} \cdot d = 2$ și $u^{n-1} \cdot (a + d) = 5$ sau $u^n = 5$ **1p**

Se află a, b, c, d **2p**

2. . 1p din oficiu

Fie t urma matricei A și d determinantul acesteia. Avem

$$\det(A - xI_2) = x^2 - xt + d \Rightarrow \det(A + I_2) = 1 + t + d \quad \mathbf{1p}$$

$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2) \cdot \det(A - \bar{\varepsilon} I_2) = (\varepsilon^2 - t\varepsilon + d)(\bar{\varepsilon}^2 - t\bar{\varepsilon} + d) = 1 + t^2 + d^2 + t - d + dt$
unde ε radacina cubica a unitatii. **2p**

Atunci $t^2 + d^2 + 1 + t - d + td = (t + d + 1)^2 \Rightarrow (t + 3)(d + 1) = 3$. **1p**

Obținem $(t, d) = (-2, 2), (0, 0), (-4, -4), (-6, -2)$. Deci $t + d \in \{-8, 0\}$ **2p**

3. . 1p din oficiu

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k}}{k^2(k+1) - (k+1)^2 k} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \mathbf{2p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 \quad \mathbf{1p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{\sqrt{n+1}} \right)^{\frac{\sqrt{n+1}}{-1}} \right]^{\frac{-1}{\sqrt{n+1}} \sqrt{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \mathbf{3p}$$

4. . 1p din oficiu

a) Se demonstrează prin inducție, că $0 < x_n < 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Se observă, că $x_{n+1} - x_n = -x_n^4 < 0$ $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Deci șirul este mărginit și strict descrescător,

$\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ convergent.

1p

Notând limita cu l și trecând la limită în relația de recurență se obține $l = 0$.

1p

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n+1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 - x_{n+1}) = x_1$ 1p

c) 3p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n \cdot x_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{\frac{1}{x_n^3}}}.$$

$(x_n)_{n \geq 1}$ fiind strict descrescător, rezultă $\left(\frac{1}{x_n^3}\right)_{n \geq 1}$ strict crescător, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_n^3}\right)_{n \geq 1}$ este

șir nemărginit.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^3} - \frac{1}{x_n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x_{n+1}^3 \cdot x_n^3}{x_n^3 - x_{n+1}^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(1-x_n^3)^3}{1+(1-x_n^3)+(1-x_n^3)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$